Т -7 (10-11 кл) ПАРА

Иррациональные уравнения

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие приемы:
1)возведение в соответствующую степень обе части уравнения;
2) введение новой переменной;
3) сведение к системе уравнений;
4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

При решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x),$$

при решении которого важную роль играет четность или нечетность ***n***.

Если ***n***- нечетное, то данное уравнение равносильно уравнению

$$f(x) = (g(x))^n.$$

Если ***n*** - четное, то, так как корень считается арифметическим, необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений): $f(x) \geq 0$. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ в этом случае равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Пример 1.

Решить уравнение $\sqrt{x-3} = 5$.

Решение. Так как ***n=2*** - четное, то обе части уравнения возводим во 2ю степень:

$(\sqrt{x-3})^2 = 5^2 \Leftrightarrow x - 3 = 25 \Leftrightarrow x = 28$

Ответ: 28

Пример 2.

Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} = 1$.

Решение. Так как в данном примере ***n=3*** - нечетное, то после возведения обеих частей уравнения в третью степень получим равносильное данному уравнение:

$$x^3 - 2x + 1 = 1^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ответ: $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{2}$.

Пример 3.

Решить уравнение $\sqrt{x+1} = 2 - x$.

Решение. Так как ***n=2*** - четное, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1=(2-x)^2 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=4-4x+x^2 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3=0 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2} \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x=(5-\sqrt{13})/2$.

Уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$, решаются следующим образом:

n – нечетное $\Rightarrow$ *f(x) = g(x)*

n - четное $\Rightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$.

Пример 4.

Решить уравнение: $\sqrt[4]{5-x}=\sqrt[4]{4x+2}$

$$\begin{cases} 5-x\ge 0 \\ 4x+2\ge 0 \\ 5-x=4x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ x\ge -0{,}5 \\ x=0{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: 0,6

Пример 5.

Решить уравнение: $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=0$

Решение. Запишем данное уравнение в виде: $\sqrt{2x+6}=\sqrt{x+1}.$ Возводя обе части в квадрат и учитывая, что $\begin{cases} x+1\ \ge\ 0 \\ 2x+6\ \ge\ 0 \end{cases}$ получим уравнение *2x+6=x+1*, решение которого есть *x* = *-5* – не удовлетворяет выписанному условию. Значит, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений

Если иррациональное уравнение содержит несколько радикалов. В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

Пример 6.

Решить уравнение $\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-3}=1$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\sqrt{2x-9}=1+\sqrt{x-3}$. Так как теперь обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведем их в квадрат:

$$2x-9=1+x-3+2\sqrt{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad x-7=\sqrt{x-3}.$$

Полученное уравнение равносильно исходному. Для его решения рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x-7\ge 0 \\ (x-7)^2=4(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-14x+49=4x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-18x+61=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 7 \\ x=9\pm\sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=9+\sqrt{20}.$$

Ответ: $x=9+\sqrt{20}$.