

## Т-6 Пара

### Действия с дробями

Дроби можно складывать, вычитать, умножать и делить. Также, дроби можно сравнивать между собой. В принципе, всё что можно делать с обычными числами, можно делать и с дробями.

#### Сложение дробей с одинаковыми знаменателями

Сложение дробей бывает двух видов:

1. Сложение дробей с одинаковыми знаменателями;
2. Сложение дробей с разными знаменателями.

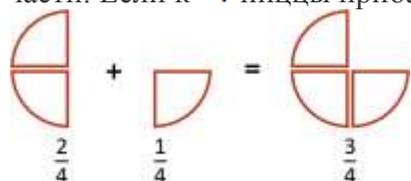
Сначала изучим сложение дробей с одинаковыми знаменателями. Тут всё просто. Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить без изменения.

Например, сложим дроби  $\frac{2}{4}$  и  $\frac{1}{4}$ . Складываем числители, а знаменатель оставляем без изменения:

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

Этот пример можно легко понять, если вспомнить про пиццу, которая разделена на четыре

части. Если к  $\frac{2}{4}$  пиццы прибавить  $\frac{1}{4}$  пиццы, то получится  $\frac{3}{4}$  пиццы:



**Пример 2.** Сложить дроби  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2}$ .

Опять же складываем числители, а знаменатель оставляем без изменения:

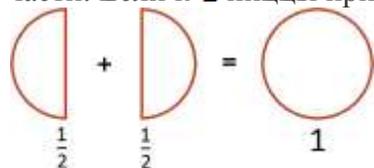
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2}$$

В ответе получилась неправильная дробь  $\frac{2}{2}$ . Если наступает конец задачи, то от неправильных дробей принято избавляться. Чтобы избавиться от неправильной дроби, нужно выделить в ней целую часть. В нашем случае целая часть выделяется легко — два разделить на два будет один:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Этот пример можно легко понять, если вспомнить про пиццу, которая разделена на две

части. Если к  $\frac{1}{2}$  пиццы прибавить еще  $\frac{1}{2}$  пиццы, то получится одна целая пицца:

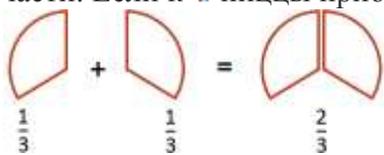


**Пример 3.** Сложить дроби  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{1}{3}$ .

Опять же складываем числители, а знаменатель оставляем без изменения:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

Этот пример можно легко понять, если вспомнить про пиццу, которая разделена на три части. Если к  $\frac{1}{3}$  пиццы прибавить ещё  $\frac{1}{3}$  пиццы, то получится  $\frac{2}{3}$  пиццы:

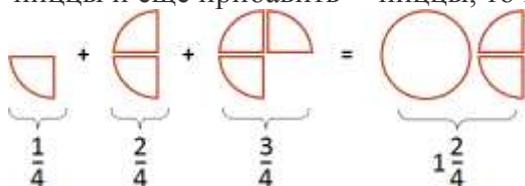


**Пример 4.** Найти значение выражения  $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}$

Этот пример решается точно также, как и предыдущие. Числители необходимо сложить, а знаменатель оставить без изменения:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+2+3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$$

Попробуем изобразить наше решение с помощью рисунка. Если к  $\frac{1}{4}$  пиццы прибавить  $\frac{2}{4}$  пиццы и ещё прибавить  $\frac{3}{4}$  пиццы, то получится 1 целая и ещё  $\frac{2}{4}$  пиццы.



Как видите в сложении дробей с одинаковыми знаменателями нет ничего сложного. Достаточно понимать следующие правила:

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить без изменения;

Если в ответе получилась неправильная дробь, то нужно выделить в ней целую часть.

### Сложение дробей с разными знаменателями

Теперь научимся складывать дроби с разными знаменателями. Когда складывают дроби, знаменатели этих дробей должны быть одинаковыми. Но одинаковыми они бывают не всегда.

Например, дроби  $\frac{2}{4}$  и  $\frac{1}{4}$  сложить можно, поскольку у них одинаковые знаменатели.

А вот дроби  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{2}$  сразу сложить нельзя, поскольку у этих дробей разные знаменатели. В таких случаях дроби нужно приводить к одинаковому (общему) знаменателю.

Существует несколько способов приведения дробей к одинаковому знаменателю. Сегодня мы рассмотрим только один из них.

Суть этого способа заключается в том, что сначала ищется наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей обеих дробей. Затем НОК делят на знаменатель первой дроби и получают первый дополнительный множитель. Аналогично поступают и со второй дробью — НОК делят на знаменатель второй дроби и получают второй дополнительный множитель.

Затем числители и знаменатели дробей умножаются на свои дополнительные множители. В результате этих действий, дроби у которых были разные знаменатели, обращаются в дроби, у которых одинаковые знаменатели. А как складывать такие дроби мы уже знаем.

**Пример 1.** Сложим дроби  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{2}$

У этих дробей разные знаменатели, поэтому нужно привести их к одинаковому (общему) знаменателю.

В первую очередь находим наименьшее общее кратное знаменателей обеих дробей. Знаменатель первой дроби это число 3, а знаменатель второй дроби — число 2. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 6

$$\text{НОК (2 и 3)} = 6$$

Теперь возвращаемся к дробям  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{2}$ . Сначала разделим НОК на знаменатель первой дроби и получим первый дополнительный множитель. НОК это число 6, а знаменатель первой дроби это число 3. Делим 6 на 3, получаем 2.

Полученное число 2 это первый дополнительный множитель. Записываем его к первой дроби. Для этого делаем небольшую косую линию над дробью и записываем над

ней найденный дополнительный множитель:  $\frac{2}{3}$

Аналогично поступаем и со второй дробью. Делим НОК на знаменатель второй дроби и получаем второй дополнительный множитель. НОК это число 6, а знаменатель второй дроби — число 2. Делим 6 на 2, получаем 3.

Полученное число 3 это второй дополнительный множитель. Записываем его ко второй дроби. Опять же делаем небольшую косую линию над второй дробью и

записываем над ней найденный дополнительный множитель:  $\frac{1}{2}$

Теперь у нас всё готово для сложения. Осталось умножить числители и знаменатели дробей на свои дополнительные множители:

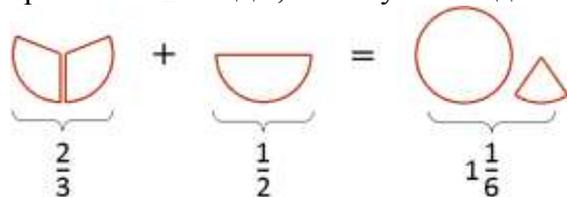
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6}$$

Посмотрите внимательно к чему мы пришли. Мы пришли к тому, что дроби у которых были разные знаменатели, превратились в дроби у которых одинаковые знаменатели. А как складывать такие дроби мы уже знаем. Давайте дорешаем этот пример до конца:

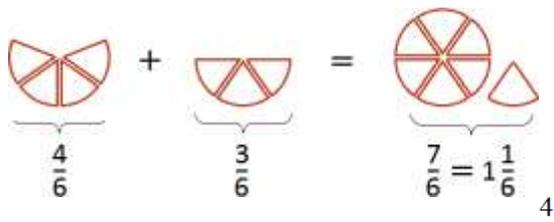
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

Таким образом, пример завершается. К  $\frac{2}{3}$  прибавить  $\frac{1}{2}$  получается  $1\frac{1}{6}$ .

Попробуем изобразить наше решение с помощью рисунка. Если к  $\frac{2}{3}$  пиццы прибавить  $\frac{1}{2}$  пиццы, то получится одна целая пицца и еще одна шестая пиццы:



Приведение дробей к одинаковому (общему) знаменателю также можно изобразить с помощью рисунка. Приведя дроби  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{2}$  к общему знаменателю, мы получили дроби  $\frac{4}{6}$  и  $\frac{3}{6}$ . Эти две дроби будут изображаться теми же кусками пицц. Различие будет лишь в том, что в этот раз они будут разделены на одинаковые доли (приведены к одинаковому знаменателю).



Первый рисунок изображает дробь  $\frac{4}{6}$  (четыре кусочка из шести), а второй рисунок изображает дробь  $\frac{3}{6}$  (три кусочка из шести). Сложив эти кусочки мы получаем  $\frac{7}{6}$  (семь кусочков из шести). Эта дробь неправильная, поэтому мы выделили в ней целую часть. В результате получили  $1\frac{1}{6}$  (одну целую пиццу и еще одну шестую пиццы).

Отметим, что мы с вами расписали данный пример слишком подробно. Нужно уметь быстро находить НОК обоих знаменателей и дополнительные множители к ним, а также быстро умножать найденные дополнительные множители на свои числители и знаменатели. Данный пример можно записать следующим образом:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

Но есть и обратная сторона медали. Если на первых этапах изучения математики не делать подробных записей, то начинают появляться вопросы рода «а откуда вон та цифра?», «почему дроби вдруг превращаются совсем в другие дроби?».

Поэтому на первых этапах советую записывать каждую мелочь. Хвастаться можно лишь в будущем, когда будут усвоены азы.

Чтобы легче было складывать дроби с разными знаменателями, можно воспользоваться следующей пошаговой инструкцией:

1. Найти НОК знаменателей дробей;
2. Разделить НОК на знаменатель каждой дроби и получить дополнительный множитель для каждой дроби;
3. Умножить числители и знаменатели дробей на свои дополнительные множители;
4. Сложить дроби, у которых одинаковые знаменатели;
5. Если в ответе получилась неправильная дробь, то выделить её целую часть.

**Пример 2.** Найти значение выражения  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ .

Воспользуемся инструкцией, которая приведена выше.

### Шаг 1. Найти НОК знаменателей дробей

Находим НОК знаменателей обеих дробей. Знаменатели дробей это числа 2, 3 и 4

$$\begin{array}{l|l} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

### Шаг 2. Разделить НОК на знаменатель каждой дроби и получить дополнительный множитель для каждой дроби

Делим НОК на знаменатель первой дроби. НОК это число 12, а знаменатель первой дроби это число 2. Делим 12 на 2, получаем 6. Получили первый дополнительный множитель 6.

Записываем его над первой дробью:  $\frac{6}{2}$

Теперь делим НОК на знаменатель второй дроби. НОК это число 12, а знаменатель второй дроби это число 3. Делим 12 на 3, получаем 4. Получили второй дополнительный

множитель 4. Записываем его над второй дробью:  $\frac{4}{3}$

Теперь делим НОК на знаменатель третьей дроби. НОК это число 12, а знаменатель третьей дроби это число 4. Делим 12 на 4, получаем 3. Получили третий дополнительный

множитель 3. Записываем его над третьей дробью:  $\frac{3}{4}$

### Шаг 3. Умножить числители и знаменатели дробей на свои дополнительные множители

Умножаем числители и знаменатели на свои дополнительные множители:

$$\frac{\overset{6}{\cancel{1}}}{2} + \frac{\overset{4}{\cancel{1}}}{3} + \frac{\overset{3}{\cancel{1}}}{4} = \frac{1 \times 6}{2 \times 6} + \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$$

### Шаг 4. Сложить дроби у которых одинаковые знаменатели

Мы пришли к тому, что дроби у которых были разные знаменатели, превратились в дроби, у которых одинаковые (общие) знаменатели. Осталось сложить эти дроби. Складываем:

$$\begin{aligned} \frac{\overset{6}{\cancel{1}}}{2} + \frac{\overset{4}{\cancel{1}}}{3} + \frac{\overset{3}{\cancel{1}}}{4} &= \frac{1 \times 6}{2 \times 6} + \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \\ &= \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

Сложение не поместилось на одной строке, поэтому мы перенесли оставшееся выражение на следующую строку. Это допускается в математике. Когда выражение не помещается на одну строку, его переносят на следующую строку, при этом надо обязательно поставить знак равенства (=) на конце первой строки и в начале новой строки. Знак равенства на второй строке говорит о том, что это продолжение выражения, которое было на первой строке.

### Шаг 5. Если в ответе получилась неправильная дробь, то выделить в ней целую часть

У нас в ответе получилась неправильная дробь. Мы должны выделить у неё целую часть. Выделяем:

$$\begin{aligned} \frac{\overset{6}{\cancel{1}}}{2} + \frac{\overset{4}{\cancel{1}}}{3} + \frac{\overset{3}{\cancel{1}}}{4} &= \frac{1 \times 6}{2 \times 6} + \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \\ &= \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Получили ответ  $1\frac{1}{12}$

### Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

Вычитание дробей бывает двух видов:

1. Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями
2. Вычитание дробей с разными знаменателями

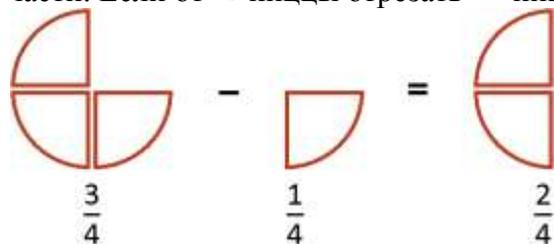
Сначала изучим вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

Чтобы вычесть из одной дроби другую, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить без изменения.

Например, найдём значение выражения  $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ . Чтобы решить этот пример, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить без изменения. Так и сделаем:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$$

Этот пример можно легко понять, если вспомнить про пиццу, которая разделена на четыре части. Если от  $\frac{3}{4}$  пиццы отрезать  $\frac{1}{4}$  пиццы, то получится  $\frac{2}{4}$  пиццы:



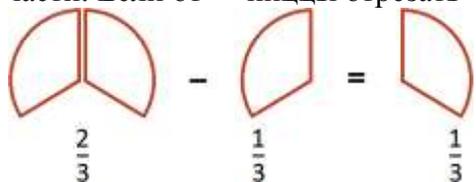
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

**Пример 2.** Найти значение выражения  $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ .

Опять же из числителя первой дроби вычитаем числитель второй дроби, а знаменатель оставляем без изменения:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

Этот пример можно легко понять, если вспомнить про пиццу, которая разделена на три части. Если от  $\frac{2}{3}$  пиццы отрезать  $\frac{1}{3}$  пиццы, то получится  $\frac{1}{3}$  пиццы:



$$\frac{13}{7} - \frac{3}{7} - \frac{1}{7}$$

**Пример 3.** Найти значение выражения  $\frac{13}{7} - \frac{3}{7} - \frac{1}{7}$

Этот пример решается точно также, как и предыдущие. Из числителя первой дроби нужно вычесть числители остальных дробей:

$$\frac{13}{7} - \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{13-3-1}{7} = \frac{9}{7}$$

В ответе получилась неправильная дробь. Выделим в ней целую часть:

$$\frac{13}{7} - \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{13-3-1}{7} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$$

Как видите в вычитании дробей с одинаковыми знаменателями ничего сложного нет. Достаточно понимать следующие правила:

1. Чтобы вычесть из одной дроби другую, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить без изменения;
2. Если в ответе получилась неправильная дробь, то нужно выделить в ней целую часть.

### Вычитание дробей с разными знаменателями

Теперь научимся вычитать дроби у которых разные знаменатели. Когда вычитают дроби их знаменатели должны быть одинаковыми. Но одинаковыми они бывают не всегда.

Например, от дроби  $\frac{3}{4}$  можно вычесть дробь  $\frac{1}{4}$ , поскольку у этих дробей одинаковые знаменатели. А вот от дроби  $\frac{2}{3}$  нельзя вычесть дробь  $\frac{1}{4}$ , поскольку у этих дробей разные знаменатели. В таких случаях дроби нужно приводить к одинаковому (общему) знаменателю.

Общий знаменатель находят по тому же принципу, которым мы пользовались при сложении дробей с разными знаменателями. В первую очередь находят НОК знаменателей обеих дробей. Затем НОК делят на знаменатель первой дроби и получают первый дополнительный множитель, который записывается над первой дробью. Аналогично НОК делят на знаменатель второй дроби и получают второй дополнительный множитель, который записывается над второй дробью.

Затем дроби умножаются на свои дополнительные множители. В результате этих операций, дроби у которых были разные знаменатели, обращаются в дроби, у которых одинаковые знаменатели. А как вычитать такие дроби мы уже знаем.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$$

**Пример 1.** Найти значение выражения:  $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

У этих дробей разные знаменатели, поэтому нужно привести их к одинаковому (общему) знаменателю.

Сначала находим НОК знаменателей обеих дробей. Знаменатель первой дроби это число 3, а знаменатель второй дроби — число 4. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 12  
**НОК (3 и 4) = 12**

Теперь возвращаемся к дробям  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{4}$

Найдём дополнительный множитель для первой дроби. Для этого разделим НОК на знаменатель первой дроби. НОК это число 12, а знаменатель первой дроби — число 3.

Делим 12 на 3, получаем 4. Записываем четвёрку над первой дробью:  $\frac{2}{3}$

Аналогично поступаем и со второй дробью. Делим НОК на знаменатель второй дроби. НОК это число 12, а знаменатель второй дроби — число 4. Делим 12 на 4,

получаем 3. Записываем тройку над второй дробью:  $\frac{1}{4}$

Теперь у нас всё готово для вычитания. Осталось умножить дроби на свои дополнительные множители:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12}$$

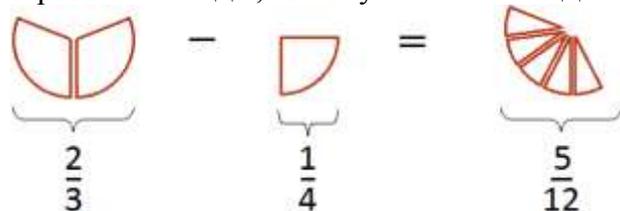
Мы пришли к тому, что дроби у которых были разные знаменатели, превратились в дроби у которых одинаковые знаменатели. А как вычитать такие дроби мы уже знаем. Давайте дорешаем этот пример до конца:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

Получили ответ  $\frac{5}{12}$

Попробуем изобразить наше решение с помощью рисунка. Если от  $\frac{2}{3}$  пиццы

отрезать  $\frac{1}{4}$  пиццы, то получится  $\frac{5}{12}$  пиццы

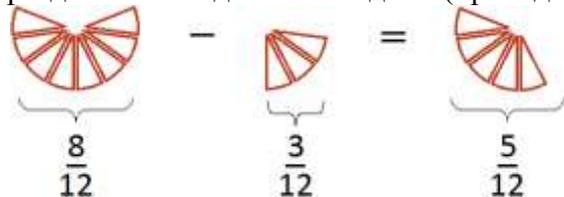


Это подробная версия решения. Решим этот пример покороче. Выглядело такое решение следующим образом:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

Приведение дробей  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{4}$  к общему знаменателю также может быть изображено с

помощью рисунка. Приведя эти дроби к общему знаменателю, мы получили дроби  $\frac{8}{12}$  и  $\frac{3}{12}$ . Эти дроби будут изображаться теми же кусочками пицц, но в этот раз они будут разделены на одинаковые доли (приведены к одинаковому знаменателю):



Первый рисунок изображает дробь  $\frac{8}{12}$  (восемь кусочков из двенадцати), а второй рисунок — дробь  $\frac{3}{12}$  (три кусочка из двенадцати). Отрезав от восьми кусочков три кусочка мы получаем пять кусочков из двенадцати. Дробь  $\frac{5}{12}$  и описывает эти пять кусочков.

**Пример 2.** Найти значение выражения  $\frac{12}{10} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

У этих дробей разные знаменатели, поэтому сначала нужно привести их к одинаковому (общему) знаменателю.

Найдём НОК знаменателей этих дробей.

Знаменатели дробей это числа 10, 3 и 5. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 30

**НОК (10, 3, 5) = 30**

Теперь находим дополнительные множители для каждой дроби. Для этого разделим НОК на знаменатель каждой дроби.

Найдём дополнительный множитель для первой дроби. НОК это число 30, а знаменатель первой дроби — число 10. Делим 30 на 10, получаем первый дополнительный множитель 3. Записываем его над первой дробью:  $\frac{3}{12}$

Теперь находим дополнительный множитель для второй дроби. Разделим НОК на знаменатель второй дроби. НОК это число 30, а знаменатель второй дроби — число 3. Делим 30 на 3, получаем второй дополнительный множитель 10. Записываем его над второй дробью:  $\frac{10}{1}$

Теперь находим дополнительный множитель для третьей дроби. Разделим НОК на знаменатель третьей дроби. НОК это число 30, а знаменатель третьей дроби — число 5. Делим 30 на 5, получаем третий дополнительный множитель 6. Записываем его над третьей дробью:  $\frac{6}{1}$

Теперь всё готово для вычитания. Осталось умножить дроби на свои дополнительные множители:

$$\frac{3}{12} - \frac{10}{3} - \frac{6}{5} = \frac{12 \times 3}{10 \times 3} - \frac{1 \times 10}{3 \times 10} - \frac{1 \times 6}{5 \times 6} = \frac{36}{30} - \frac{10}{30} - \frac{6}{30}$$

Мы пришли к тому, что дроби у которых были разные знаменатели, превратились в дроби у которых одинаковые (общие) знаменатели. А как вычитать такие дроби мы уже знаем. Давайте дорешаем этот пример.

Продолжение примера не поместится на одной строке, поэтому переносим продолжение на следующую строку. Не забываем про знак равенства (=) на новой строке:

$$\frac{3}{12} - \frac{10}{3} - \frac{6}{5} = \frac{12 \times 3}{10 \times 3} - \frac{1 \times 10}{3 \times 10} - \frac{1 \times 6}{5 \times 6} = \frac{36}{30} - \frac{10}{30} - \frac{6}{30} =$$

$$= \frac{36 - 10 - 6}{30} = \frac{20}{30}$$

В ответе получилась правильная дробь, и вроде бы нас всё устраивает, но она слишком громоздка и некрасива. Надо бы сделать её проще. А что можно сделать? Можно сократить эту дробь.

Чтобы сократить дробь  $\frac{20}{30}$ , нужно разделить её числитель и знаменатель на наибольший общий делитель (НОД) чисел 20 и 30.

Итак, находим НОД чисел 20 и 30:

$$\begin{array}{r|l} 20 & \underline{2} \\ 10 & \underline{2} \\ 5 & \underline{5} \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & \underline{2} \\ 15 & \underline{3} \\ 5 & \underline{5} \\ 1 & \end{array}$$

$$2 \times 5 = 10$$

Теперь возвращаемся к нашему примеру и делим числитель и знаменатель дроби  $\frac{20}{30}$  на найденный НОД, то есть на 10

$$\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\overset{10}{\cancel{10}}} - \frac{\overset{10}{\cancel{1}}}{\cancel{3}} - \frac{\overset{6}{\cancel{6}}}{\cancel{5}} = \frac{12 \times 3}{10 \times 3} - \frac{1 \times 10}{3 \times 10} - \frac{1 \times 6}{5 \times 6} = \frac{36}{30} - \frac{10}{30} - \frac{6}{30} =$$

$$= \frac{36 - 10 - 6}{30} = \frac{20}{30} = \frac{20 : 10}{30 : 10} = \frac{2}{3}$$

Получили ответ  $\frac{2}{3}$

### Умножение дроби на число

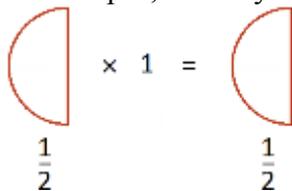
Чтобы умножить дробь на число, нужно числитель данной дроби умножить на это число, а знаменатель оставить без изменений.

**Пример 1.** Умножить дробь  $\frac{1}{2}$  на число 1.

Умножим числитель дроби  $\frac{1}{2}$  на число 1

$$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

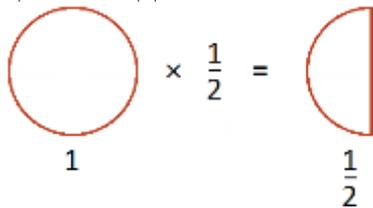
Запись  $\frac{1}{2} \times 1$  можно понимать, как взять половину 1 раз. К примеру, если  $\frac{1}{2}$  пиццы взять 1 раз, то получится  $\frac{1}{2}$  пиццы



Из законов умножения мы знаем, что если множимое и множитель поменять местами, то произведение не изменится. Если выражение  $\frac{1}{2} \times 1$ , записать как  $1 \times \frac{1}{2}$ , то произведение по-прежнему будет равно  $\frac{1}{2}$ . Опять же срабатывает правило перемножения целого числа и дроби:

$$1 \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Эту запись можно понимать, как взятие половины от единицы. К примеру, если имеется 1 целая пицца и мы возьмем от неё половину, то у нас окажется  $\frac{1}{2}$  пиццы:



**Пример 2.** Найти значение выражения  $\frac{2}{4} \times 4$

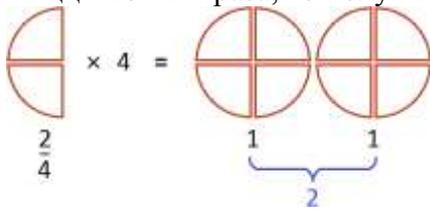
Умножим числитель дроби  $\frac{2}{4}$  на 4

$$\frac{2}{4} \times 4 = \frac{2 \times 4}{4} = \frac{8}{4}$$

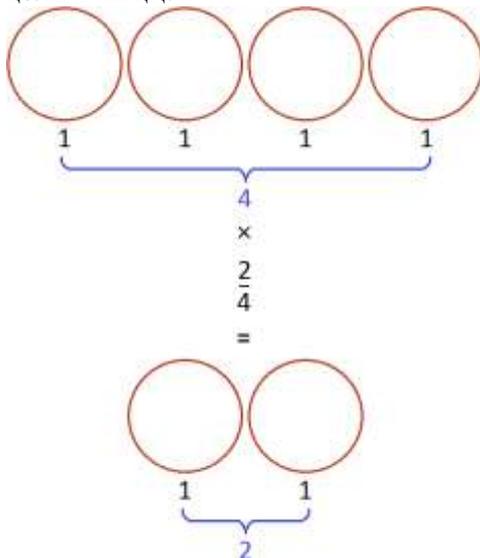
В ответе получилась неправильная дробь. Выделим в ней целую часть:

$$\frac{2}{4} \times 4 = \frac{2 \times 4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Выражение  $\frac{2}{4} \times 4$  можно понимать, как взятие двух четвертей 4 раза. К примеру, если  $\frac{2}{4}$  пиццы взять 4 раза, то получится две целые пиццы



А если поменять множимое и множитель местами, то получим выражение  $4 \times \frac{2}{4}$ . Оно тоже будет равно 2. Это выражение можно понимать, как взятие двух пицц от четырех целых пицц:



Число, которое умножается на дробь, и знаменатель дроби разрешается сокращать, если они имеют общий делитель, больший единицы.

Например, выражение  $4 \times \frac{3}{4}$  можно вычислить двумя способами.

**Первый способ.** Умножить число 4 на числитель дроби, а знаменатель дроби оставить без изменений:

$$4 \times \frac{3}{4} = \frac{4 \times 3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

**Второй способ.** Умножаемую четвёрку и четвёрку, находящуюся в знаменателе дроби  $\frac{3}{4}$ , можно сократить. Сократить эти четвёрки можно на 4, поскольку наибольший общий делитель для двух четвёрок есть сама четвёрка:

$$\cancel{4} \times \frac{3}{\cancel{4}} = \frac{1 \times 3}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Получился тот же результат 3. После сокращения четвёрок, на их месте образуются новые числа: две единицы. Но перемножение единицы с тройкой, и далее деление на единицу ничего не меняет. Поэтому решение можно записать покороче:

$$\cancel{4} \times \frac{3}{\cancel{4}} = 3$$

Сокращение может быть выполнено даже тогда, когда мы решили воспользоваться первым способом, но на этапе перемножения числа 4 и числителя 3 решили воспользоваться сокращением:

$$4 \times \frac{3}{4} = \frac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{4}_1} = 3$$

А вот к примеру выражение  $7 \times \frac{2}{5}$  можно вычислить только первым способом — умножить число 7 на числитель дроби  $\frac{2}{5}$ , а знаменатель оставить без изменений:

$$7 \times \frac{2}{5} = \frac{7 \times 2}{5} = \frac{14}{5} = 2 \frac{4}{5}$$

Связано это с тем, что число 7 и знаменатель дроби  $\frac{2}{5}$  не имеют общего делителя, бóльшего единицы, и соответственно не сокращаются.

### Умножение дробей

Чтобы перемножить дроби, нужно перемножить их числители и знаменатели. Если в ответе получится неправильная дробь, нужно выделить в ней целую часть.

**Пример 1.** Найти значение выражения  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ .

Умножаем числитель первой дроби на числитель второй дроби, а знаменатель первой дроби на знаменатель второй дроби:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6}$$

Получили ответ  $\frac{2}{6}$ . Желательно сократить данную дробь. Дробь  $\frac{2}{6}$  можно сократить на 2. Тогда окончательное решение примет следующий вид:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$$

Выражение  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$  можно понимать, как взятие  $\frac{2}{3}$  пиццы от половины пиццы. Допустим, у нас есть половина пиццы:



$\frac{1}{2}$

Как взять от этой половины две третьих? Сначала нужно поделить эту половину на три равные части:



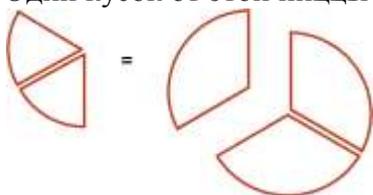
И взять от этих трех кусочков два:



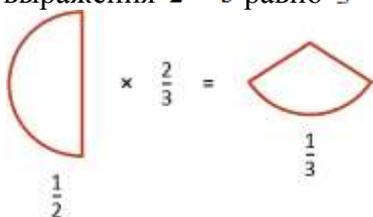
У нас получится  $\frac{1}{3}$  пиццы. Вспомните, как выглядит пицца, разделенная на три части:



Один кусок от этой пиццы и взятые нами два кусочка будут иметь одинаковые размеры:



Другими словами, речь идет об одном и том же размере пиццы. Поэтому значение выражения  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$  равно  $\frac{1}{3}$



**Пример 2.** Найти значение выражения  $\frac{2}{4} \times \frac{5}{2}$

Умножаем числитель первой дроби на числитель второй дроби, а знаменатель первой дроби на знаменатель второй дроби:

$$\frac{2}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{2 \times 5}{4 \times 2} = \frac{10}{8}$$

В ответе получилась неправильная дробь. Выделим в ней целую часть:

$$\frac{2}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{2 \times 5}{4 \times 2} = \frac{10}{8} = 1 \frac{2}{8}$$

**Пример 3.** Найти значение выражения  $\frac{21}{30} \times \frac{5}{15}$

Умножаем числитель первой дроби на числитель второй дроби, а знаменатель первой дроби на знаменатель второй дроби:

$$\frac{21}{30} \times \frac{5}{15} = \frac{21 \times 5}{30 \times 15} = \frac{105}{450}$$

В ответе получилась правильная дробь, но будет хорошо, если её сократить. Чтобы сократить эту дробь, нужно числитель и знаменатель данной дроби разделить на наибольший общий делитель (НОД) чисел 105 и 450.

Итак, найдём НОД чисел 105 и 450:

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$5 \times 3 = 15$$

Теперь делим числитель и знаменатель нашего ответа на НОД, который мы сейчас нашли, то есть на 15

$$\frac{21}{30} \times \frac{5}{15} = \frac{21 \times 5}{30 \times 15} = \frac{105}{450} = \frac{105:15}{450:15} = \frac{7}{30}$$

Представление целого числа в виде дроби

Любое целое число можно представить в виде дроби. Например, число 5 можно представить как  $\frac{5}{1}$ . От этого пятёрка своего значения не поменяет, поскольку

выражение  $\frac{5}{1}$  означает «число пять разделить на единицу», а это, как известно равно пятёрке:

$$\frac{5}{1} = 5$$

## Обратные числа

**Определение.** Обратным к числу  $a$  называется число, которое при умножении на  $a$  даёт единицу.

Давайте подставим в это определение вместо переменной  $a$  число 5 и попробуем прочитать определение:

**Обратным к числу 5 называется число, которое при умножении на 5 даёт единицу.**

Можно ли найти такое число, которое при умножении на 5, даёт единицу? Оказывается

можно. Представим пятёрку в виде дроби:  $\frac{5}{1}$

Затем умножить эту дробь на саму себя, только поменяем местами числитель и знаменатель. Другими словами, умножим дробь  $\frac{5}{1}$  на саму себя, только перевёрнутую:

$$\frac{5}{1} \times \frac{1}{5}$$

Что получится в результате этого? Если мы продолжим решать этот пример, то получим единицу:

$$\frac{5}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 1}{1 \times 5} = \frac{5}{5} = 1$$

Значит обратным к числу 5, является число  $\frac{1}{5}$ , поскольку при умножении 5 на  $\frac{1}{5}$  получается единица.

Обратное число можно найти также для любого другого целого числа.

Примеры:

обратным числа 2 является дробь  $\frac{1}{2}$

обратным числа 3 является дробь  $\frac{1}{3}$

обратным числа 4 является дробь  $\frac{1}{4}$

Найти обратное число можно также для любой другой дроби. Для этого достаточно перевернуть её.

Примеры:

для дроби  $\frac{1}{2}$  обратной дробью является дробь  $\frac{2}{1}$

для дроби  $\frac{5}{4}$  обратной дробью является дробь  $\frac{4}{5}$

для дроби  $\frac{16}{12}$  обратной дробью является дробь  $\frac{12}{16}$

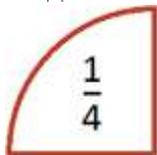
## Деление дроби на число

Допустим, у нас имеется половина пиццы:

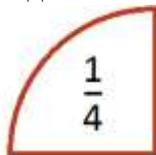


$$\frac{1}{2}$$

Разделим её поровну на двоих. Сколько пиццы достанется каждому?



Первому



Второму

Видно, что после деления половины пиццы получилось два равных кусочка, каждый из которых составляет  $\frac{1}{4}$  пиццы. Значит каждому достанется по  $\frac{1}{4}$  пиццы.

Деление дробей выполняется с помощью обратных чисел. Обратные числа позволяют заменить деление умножением.

**Чтобы разделить дробь на число, нужно эту дробь умножить на число, обратное делителю.**

Пользуясь этим правилом, запишем деление нашей половины пиццы на две части.

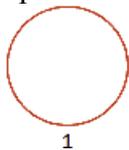
Итак, требуется разделить дробь  $\frac{1}{2}$  на число 2. Здесь делимым является дробь  $\frac{1}{2}$ , а делителем число 2.

Чтобы разделить дробь  $\frac{1}{2}$  на число 2, нужно эту дробь умножить на число, обратное делителю 2. Обратное делителю 2 это дробь  $\frac{1}{2}$ . Значит нужно умножить  $\frac{1}{2}$  на  $\frac{1}{2}$

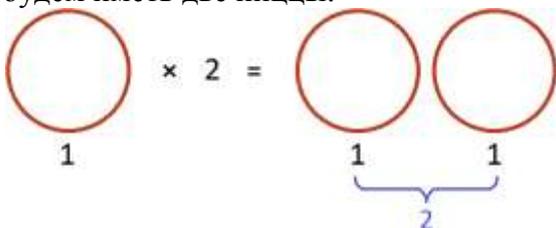
$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Получили ответ  $\frac{1}{4}$ . Значит при делении половины на две части получается четверть.

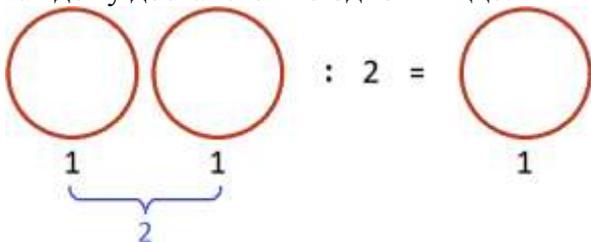
Попробуем понять механизм этого правила. Для этого рассмотрим следующий простейший пример. Пусть у нас имеется одна целая пицца:



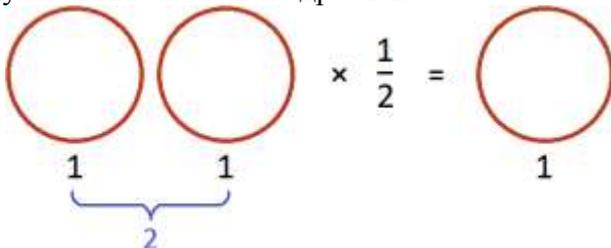
Умножим её на 2. То есть повторим её два раза (или возьмём два раза). В результате будем иметь две пиццы:



Теперь угостим этими пиццами двоих друзей. То есть разделим две пиццы на 2. Тогда каждому достанется по одной пицце:

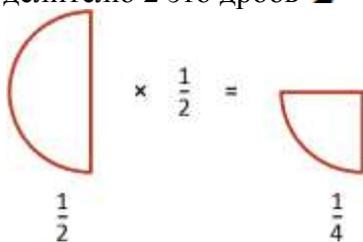


Разделить две пиццы на 2 это всё равно, что взять половину от этих пицц, то есть умножить число 2 на дробь  $\frac{1}{2}$



В обоих случаях получился один и тот же результат.

То же самое происходило, когда мы делили половину пиццы на две части. Чтобы разделить  $\frac{1}{2}$  на 2, мы умножили эту дробь на число, обратное делителю 2. А обратное делителю 2 это дробь  $\frac{1}{2}$

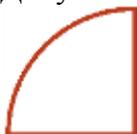


**Пример 2.** Найти значение выражения  $\frac{1}{4} : 2$

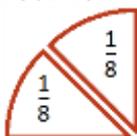
Умножим первую дробь на число, обратное делителю:

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Допустим, имеется четверть пиццы и нужно разделить её на двоих:



Если разделить эту четверть на две части, то каждая получившаяся часть будет одной восьмой частью целой пиццы:



Заменять деление умножением можно не только при работе с дробями, но и с обычными числами. Например, все мы знаем, что 10 разделить на 2 будет 5

$$10 : 2 = 5$$

Заменим в этом примере деление умножением. Чтобы разделить число 10 на число 2,

можно умножить число 10 на число, обратное числу 2. А обратное числу 2 это дробь  $\frac{1}{2}$

$$10 \times \frac{1}{2} = \frac{10 \times 1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Как видно результат не изменился. Мы снова получили ответ 5.

Можно сделать вывод, что деление можно заменять умножением при условии, что вместо делителя будет подставлено обратное ему число.

**Пример 3.** Найти значение выражения  $\frac{3}{6} : 6$

Умножим первую дробь на число, обратное делителю. Обратное делителю число это

$$\frac{3}{6} : 6 = \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{36} = \frac{3:3}{36:3} = \frac{1}{12}$$

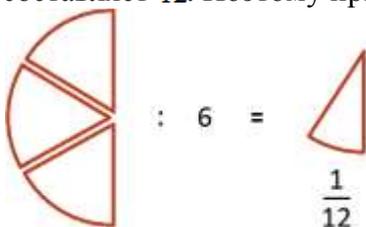
Допустим, имелось  $\frac{3}{6}$  пиццы:



Как разделить такую пиццу на шестерых? Если каждый из трех кусков разделить пополам, то можно получить 6 равных кусков



Эти шесть кусков являются шестью кусками из двенадцати. А один из этих кусков составляет  $\frac{1}{12}$ . Поэтому при делении  $\frac{3}{6}$  на 6 получается  $\frac{1}{12}$



### Деление числа на дробь

Правило деления числа на дробь такое же, как и правило деления дроби на число.

**Чтобы разделить число на дробь, нужно умножить это число на дробь, обратную делителю.**

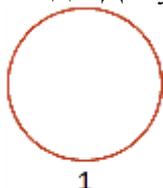
Например, разделим число 1 на  $\frac{1}{2}$ .

Чтобы разделить число 1 на  $\frac{1}{2}$ , нужно это число 1 умножить на дробь, обратную дроби  $\frac{1}{2}$ .

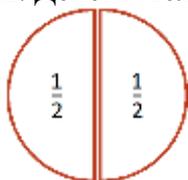
А обратная дроби  $\frac{1}{2}$  это дробь  $\frac{2}{1}$

$$1 : \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = \frac{1 \times 2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Выражение  $1 : \frac{1}{2}$  можно понимать, как определение количества половин в одной целой пицце. Допустим, имеется одна целая пицца:



Если зададим вопрос «сколько раз половина содержится в этой пицце», то ответом будет 2. Действительно, половина содержится в одной целой пицце два раза

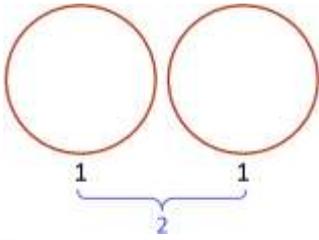


**Пример 2.** Найти значение выражение  $2 : \frac{1}{2}$

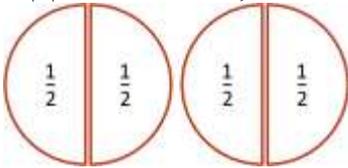
Умножим число 2 на дробь, обратную делителю. А обратная делителю дробь это дробь  $\frac{2}{1}$

$$2 : \frac{1}{2} = 2 \times \frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

Допустим, у нас имеются две целые пиццы:



Если зададим вопрос «сколько раз половина содержится в двух пиццах», то ответом будет 4. Действительно, половина содержится в двух пиццах четыре раза:



### Деление дробей

Чтобы разделить дробь на дробь, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Например, разделим  $\frac{1}{2}$  на  $\frac{1}{4}$

Чтобы разделить  $\frac{1}{2}$  на  $\frac{1}{4}$ , нужно  $\frac{1}{2}$  умножить на дробь, обратную дроби  $\frac{1}{4}$ . А обратная

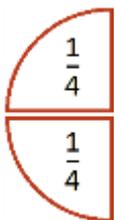
дроби  $\frac{1}{4}$  это дробь  $\frac{4}{1}$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{1 \times 4}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Допустим, имеется половина пиццы:



Если зададим вопрос «сколько раз четверть пиццы содержится в этой половине», то ответом будет 2. Действительно, четверть пиццы содержится в половине пиццы два раза:



**Пример 1.** Найти значение выражения  $\frac{5}{7} : \frac{3}{5}$

Умножаем первую дробь на дробь, обратную второй. Грубо говоря, умножаем первую дробь на перевернутую вторую:

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{5} = \frac{5}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{5 \times 5}{7 \times 3} = \frac{25}{21} = 1 \frac{4}{21}$$

**Пример 2.** Найти значение выражения  $\frac{2}{3} : \frac{1}{7}$

Умножаем первую дробь на дробь обратную второй:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{1} = \frac{2 \times 7}{3 \times 1} = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}$$

Решите несколько примеров, приведенных ниже. Можете использовать материалы, как справочник. Это позволит вам научиться работать с литературой.

**Задания для самостоятельного решения:**

Найдите значение выражения:

1.  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$

2.  $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$

3.  $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}$

4.  $\frac{7}{8} - \frac{5}{8}$

5.  $\frac{3}{10} + \frac{1}{9}$

6.  $\frac{1}{2} + \frac{5}{6}$

7.  $\frac{5}{12} - \frac{2}{9}$

8.  $\frac{4}{16} - \frac{2}{12}$

9.  $\frac{3}{8} \times \frac{4}{9}$

10.  $\frac{5}{6} \times \frac{2}{12}$

11.  $\frac{2}{5} : \frac{3}{10}$

12.  $\frac{7}{9} : \frac{14}{5}$

13.  $5 \times \frac{1}{2}$

14.  $21 \times \frac{3}{7}$